Diffusion probabiliste dans les réseaux dynamiques

A. Clementi[1] P. Crescenzi[2] C. Doerr[3 †]
P. Fraigniaud[4 ‡] F. Pasquale[5] R. Silvestri[1]

[1] *Università Tor Vergata di Roma* [2] *Università di Firenze* [3] *Université Paris Diderot et Max Planck Institute Saarbrücken*
[4] *CNRS et Université Paris Diderot,* [5] *Sapienza Università di Roma*

La diffusion probabiliste est une des techniques les plus populaires pour diffuser de l'information dans les réseaux à grande échelle. Cette technique est appréciée pour sa simplicité, sa robustesse et son efficacité. Dans le cas du protocole `Push`, chaque nœud informé choisit à chaque étape un de ses voisins aléatoirement de manière uniforme, et lui transmet l'information. Ce protocole est connu pour permettre la diffusion en $O(\log n)$ étapes, avec forte probabilité, dans plusieurs familles de réseaux *statiques* de n nœuds. De plus, il a été montré empiriquement que le protocole `Push` offre de très bonnes performances en pratique. En particulier, il se montre robuste aux évolutions dynamiques de la structure réseau. Dans cet article, nous analysons le protocole `Push` dans le cas de réseaux *dynamiques*. Nous considérons le modèle des graphes à évolution arête-markovienne, qui permet de capturer une forme de dépendance temporelle entre la structure du réseau au temps t et celle au temps $t+1$. Plus précisément, une arête inexistante apparaît avec probabilité p, tandis qu'une arête existante disparaît avec probabilité q. Ayant pour objectif de coller avec des traces réelles, nous concentrons principalement notre étude sur le cas $p = \Omega(\frac{1}{n})$ et q constant. Nous prouvons que, dans ce cas réaliste, le protocole `Push` permet de diffuser l'information en $O(\log n)$ étapes, avec forte probabilité. Cette borne reste valide même lorsque, avec forte probabilité, le réseau est déconnecté à chaque étape (typiquement, lorsque $p \ll \frac{\log n}{n}$). Ce résultat démontre ainsi formellement la robustesse du protocole `Push` dans le cadre d'évolution temporelle de la structure du réseau. La version complète de cet article, en cours de soumission, est disponible sur arXiv (voir [CCD$^+$13] qui contient un sur-ensemble des résultats présentés ici).

---

1 Contexte et objectif

La diffusion probabiliste est une des techniques les plus populaires de diffusion d'information dans le contexte des grands réseaux distribués. En particulier, le protocole `Push` s'exécute par étape comme suit : une source arbitraire est initialement détentrice d'une information, et, à chaque étape, un nœud informé choisit aléatoirement de façon uniforme un de ses voisins qui devient informé à l'étape suivante. Ce protocole a été introduit par [DGH$^+$87] dans le cadre des bases de données distribuées, afin d'exécuter les mises à jour et, surtout, préserver la consistance entre des données répliquées. Depuis, le protocole `Push` a été proposé pour de nombreuses autres applications telles que la détection de pannes dans les systèmes distribués, l'échantillonnage de nœuds, la recherche de données, le calcul de la moyenne de données dans un réseau de capteurs, etc. Voir [CCD$^+$13] pour les références et [JVG$^+$07] pour un survol des applications potentielles du protocole `Push` et de la diffusion probabiliste en générale.

En sus de ses applications, la diffusion probabiliste a également été analysée dans un cadre formel. En effet, comme observé par [DGH$^+$87], la diffusion probabiliste n'est juste qu'un exemple de processus épidémique et son analyse ≪ benefits greatly from the existing mathematical theory of epidemiology ≫ (même si son application dans le cadre des réseaux suit généralement des objectifs opposés à son application dans le cadre de la médecine). En particulier, il a été montré que le *temps de diffusion*, c'est-à-dire le nombre

---

† Support du Feodor Lynen postdoctoral research fellowship de la Fondation Alexander von Humboldt, et de l'Agence Nationale de la Recherche au travers du projet ANR-09-JCJC-0067-01.

‡ Support du projet ANR DISPLEXITY, et du projet INRIA GANG.

d'étapes nécessaires pour qu'une information connue initialement d'un nœud soit, avec forte probabilité, finalement connue de tous les nœuds, a été étudié pour de nombreuses classes de graphes. (Un évènement $\mathcal{E}_n$ a une forte probabilité si $\Pr[\mathcal{E}_n] \geq 1 - O(1/n^c)$ pour une certaine constante $c > 0$). Cela inclut les graphes complets, les hypercubes, les graphes aléatoires d'Erdős–Rényi, les graphes construits selon l'attachement préférentiel, et certains types de graphes ayant une distribution de degrés en loi de puissance. En plus de l'obtention de bornes sur le temps de diffusion, beaucoup de ces travaux montrent des connexions fortes entre ce temps et certains paramètres classiques de graphes capturant différentes formes de connectivité, incluant la *conductance*, l'expansion-arête, et l'expansion-sommet. Voir [CCD$^+$13] pour les références bibliographiques.

Il est toutefois important de noter que les techniques et les arguments adoptés dans toutes ces études s'appuient fortement sur le fait que tous ces graphes sont *statiques*, c'est-à-dire n'évoluent pas au cours du déroulement de la diffusion. En particulier, la plupart de ces études exploitent le fait crucial que le degré de chaque sommet (que ce soit une variable aléatoire ou une valeur déterministe) ne change pas durant toute l'exécution du protocole. Ce cadre d'étude n'est donc guère informatif lorsque l'on s'intéressent à des réseaux dynamiques tels que ceux rencontrés dans l'étude des réseaux ad hoc sans fil, des réseaux mobiles, ou des réseaux pair-à-pair, lorsque les nœuds et/ou les liens apparaissent ou disparaissent fréquemment au cours du temps. L'objectif de cet article est d'étudier la diffusion d'information, dont en particulier le protocole `Push`, dans un cadre plus réaliste afin de déduire des conclusions applicables au réseaux dynamiques.

2 Réseaux dynamiques

C'est précisément dans le but d'analyser le comportement de protocoles distribués dans le cadre des réseaux dynamique que le concept des *graphes évolutifs* a été introduit dans la littérature [Fer02]. Un tel graphe est simplement une séquence $(G_t)_{t\geq 0}$ de graphes sur le même ensemble de sommets, où $t \in \mathbb{N}$ (pour indiquer que l'on considère des ≪ photos ≫ à temps discrets même si le graphe peut évoluer de façon continue). Ce concept est suffisamment général pour modéliser un grand nombre de dynamiques, d'une dynamique guidée par un adversaire [CMPS09, KLO10] à celle entièrement aléatoire [Bol01]. En effet, quoiqu'uniquement les arêtes soient sujettes à modifications, un sommet dont toutes les arêtes incidentes sont absentes au temps t peut être perçu comme ayant quitté le réseau au temps t (où le réseau est vu comme la composante géante de G_t). De là il découle que les graphes évolutifs capturent également une certaine forme de dynamique de nœuds.

Dans le cas des graphes évolutifs aléatoires, le graphe G_t est choisi aléatoirement selon une certaine loi de probabilité parmi un certain ensemble de graphes, indépendamment du choix des autres $G_{t'}$, $t' \neq t$. Un exemple typique de ce type de graphes évolutifs est lorsque G_t est choisi uniformément dans $\mathcal{G}_{n,p}$, l'ensemble des graphes aléatoires d'Erdős-Rényi [AKL08]. Dans ce cas, à chaque étape t, chaque arête e existe dans G_t avec probabilité p, indépendamment des autres arêtes. De tels graphes évolutifs offrent des capacités de communication supérieures aux graphes statiques de même nombre moyen d'arêtes. Ceci a été démontré en particulier dans le cas d'un protocole de diffusion simpliste : le protocole `Flooding`. Lors de l'exécution de ce protocole, lorsqu'un sommet non-informé possède un voisin informé au temps t, il devient informé au temps $t+1$. Il a été démontré [BCF11, CMM$^+$10, CMPS11] que le temps de diffusion du protocole `Flooding` peut être très rapide (typiquement poly-logarithmique en le nombre de sommets) même si chaque graphe est faiblement connecté, voire même déconnecté avec forte probabilité à chaque étape. De tels résultats sont autant d'évidences que certaines dynamiques aléatoires non seulement ne ralentissent pas, mais peuvent accélérer les communications.

La même observation à propos de `Flooding` reste valable lorsque le modèle évolutif inclut des dépendances *temporelle*, comme dans le modèle *arête-markovien*. Selon ce modèle, le graphe évolutif $(G_t)_{t\geq 0}$ débute à partir d'un graphe initial G_0 et, à chaque étape,

- si une arête n'existe pas dans G_t, elle apparaît dans G_{t+1} avec probabilité p, et
- si une arête existe dans G_t, elle disparaît dans G_{t+1} avec probabilité q.

Quel que soit le graphe initial G_0, un graphe évolutif arête-markovien converge vers un graphe aléatoire de $\mathcal{G}_{n,\tilde{p}}$ avec comme distribution stationnaire de chaque arête $\tilde{p} = \frac{p}{p+q}$. Néanmoins, il convient de noter que le modèle inclut des dépendances markoviennes entre les graphes de deux étapes consécutives. Ainsi, étant donnée G_t, le graphe suivant G_{t+1} n'est pas nécessairement un graphe aléatoire dans $\mathcal{G}_{n,\tilde{p}}$.

Le modèle arête-markovien a fait récemment l'objet de mesures expérimentales, dans le contexte des réseaux mobiles aux connexions opportunistes [WCDdA11], ainsi que dans celui des réseaux pair-à-pair [VP11]. Ces mesures démontrent une bonne adéquation du modèle avec certaines traces réelles.

Le temps de diffusion du protocole `Flooding` a été récemment analysé dans le modèle arête-markovien, pour toute valeur de$\tilde{p}$ (voir [BCF11, CMPS11]). Une variante du modèle dans laquelle les probabilités p and q de « naissance » et de « mort » dépendent non seulement du nombre de nœuds mais aussi d'une notion de distance entre ces nœuds a été étudiée dans [GH10].

Le protocole `Flooding` génère cependant un grand nombre de messages. De fait, même si son temps d'exécution fournit un analogue pour les graphes dynamique du diamètre pour les graphes statiques, le protocole `Flooding` ne reflète pas le type de protocoles de diffusion généralement utilisés en pratique. Nous nous sommes donc intéressés à l'analyse des performances du protocole `Push` dans les graphes évolutifs arête-markoviens.

3 Cadre d'étude

Nous focalisons notre attention sur des réseaux dynamiques générés par le modèle arête-markoviens pour des paramètres p et q offrant une bonne adéquation avec des traces réelles, tel qu'observé dans [VP11, WCDdA11]. Ces traces correspondent à des réseaux dont la dynamique est relativement élevée, pour lesquels la probabilité de « mort » q est d'au moins un ordre de magnitude plus élevé que la probabilité de « naissance » p. Afin de fixer des paramètres p et q qui correspondent à cette observation empirique, considérons l'espérance $\bar{m}$ du nombre de liens et l'espérance $\bar{d}$ du degré de chaque nœud en régime stationnaire, gouverné par $\tilde{p} = \frac{p}{p+q}$. Nous avons $\bar{m} = \frac{p}{p+q}\binom{n}{2}$, et $\bar{d} = \frac{2\bar{m}}{n} = (n-1)\frac{p}{p+q}$. Ainsi, en régime stationnaire, l'espérance ν du nombre d'arêtes qui changent leur état (de non-existant à existant, ou vice versa) à chaque étape vérifie

$$\nu = \bar{m}q + (\tbinom{n}{2} - \bar{m})p = \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{pq}{p+q} + \left(1 - \frac{p}{p+q}\right)p\right) = n(n-1)\frac{pq}{p+q} = nq\bar{d}.$$

En conséquence, pour capturer une forte dynamique telle qu'observée dans les traces réelles, nous avons fixé q constant, de façon à ce qu'une fraction constante des arêtes disparaissent à chaque étape, tandis qu'une fraction p des arêtes non-existantes apparaissent. Nous avons considéré p quelconque dans $]0,1[$, avec comme unique restriction que $p \geq \frac{1}{n}$. (Pour des valeurs de p plus petites, $p \ll 1/n$, le temps d'exécution de tout protocole de communication est dépendant du temps moyen $\frac{1}{np} \gg 1$ requis pour chaque sommet afin d'acquérir ne serait-ce qu'un lien vers un autre sommet). En résumé, nous nous concentrons sur l'intervalle suivant de valeurs :

$$\frac{1}{n} \leqslant p < 1 \quad \text{et} \quad q = \Omega(1). \tag{1}$$

Cet intervalle permet de capturer des réseaux dynamiques offrant un grand spectre de densités différentes (des graphes déconnectés aux graphes presque complets) tout en offrant un nombre moyen de changement d'états d'arêtes par étape égal à une contante fraction du nombre total moyen d'arêtes.

4 Nos résultats

Pour les paramètres de l'équation (1), nous avons montré que, avec forte probabilité, le temps d'exécution du protocole `Push` est $\Theta(\log n)$ étapes dans tout graphe évolutif arête-markovien, quel que soit le graphe initial G_0. En particulier, même si, avec forte probabilité, le graphe G_t est non connexe pour tout t (c'est typiquement le cas pour $p \ll \frac{\log n}{n}$), le protocole `Push` s'exécute aussi rapidement que possible. (Le protocole `Push` ne peut en effet s'exécuter plus rapidement qu'en $\Omega(\log n)$ étapes dans tout graphe statique ou dynamique puisque le nombre de sommets informés ne peut qu'au plus doubler à chaque étape). Il est également intéressant de comparer les performances du protocole `Push` avec celles du protocole `Flooding`. Les bornes inférieures connues pour `Flooding` dans les graphes arête-markoviens [CMPS11] (qui sont évidemment également des bornes inférieures pour `Push`) montrent que, pour $p = \Theta(1/n)$, les temps de diffusion des deux protocoles ont le même ordre de grandeur. Par ailleurs, pour $p = \Omega(1/n)$, il est clair que le facteur de ralentissement du protocole `Push` comparé à `Flooding` est au plus logarithmique. Cette propriété est remarquable puisque le nombre moyen de messages échangés par nœud dans le protocole `Push` peut être exponentiellement plus faible que dans le protocole `Flooding`. A titre d'exemple, pour $p = \Theta(1/\sqrt{n})$, le degré moyen est $\Theta(\sqrt{n})$, et le protocole `Flooding` envoie donc au moins $\Theta(\sqrt{n})$ messages par nœud, alors que le protocole `Push` n'envoie qu'au plus $O(\log n)$ messages par nœud.

5 Techniques

Il est très important de noter que l'analyse du protocole `Push` dans les graphes arête-markoviens ne nécessite pas seulement de prendre en compte les dépendances temporelles (entre G_t et G_{t+1}), mais également des dépendance *spatiales*, ce qui rend cette analyse bien plus complexe que dans le cas statique. Pour se convaincre de l'existence de dépendances spatiales, considérons une étape de `Push`, où l'on suppose que $k \geq 2$ nœuds disposent déjà de l'information, et essayons de calculer combien de nouveaux nœuds vont être informés à cette étape. Soit $\delta(u)$ le nœud sélectionné par le nœud informé u exécutant le protocole `Push` (c'est-à-dire $\delta(u)$ est choisi aléatoirement uniformément parmi tous les voisins de u). En conditionnant sur le degré de u, il est possible de calculer $\Pr[\delta(u) = v]$ pour tout nœud non-informé v. Néanmoins, il est crucial d'observer que les évènements « $\delta(u_1) = v_1$ » et « $\delta(u_2) = v_2$ » ne sont pas nécessairement indépendants. En effet, l'occurrence de l'évènement « $\delta(u_1) = v_1$ » fait décroître la probabilité de l'existence d'une arête entre u_1 et u_2, et affecte donc la valeur de la variable aléatoire $\delta(u_2)$. Cette corrélation positive empêche l'utilisation des méthodes classiques utilisées pour analyser le protocole `Push` dans les graphes statiques, ou rend l'utilisation de ces méthodes bien plus complexe. Nous renvoyons à [CCD+13] pour la description détaillée des techniques utilisées pour l'analyse du protocole `Push` dans les graphes arête-markoviens.

Références

[AKL08] C. Avin, M. Koucky, and Z. Lotker. How to explore a fast-changing world. In *Proc. of 35th ICALP*, volume 5125 of *LNCS*, pages 121–132. Springer-Verlag, 2008.

[BCF11] H. Baumann, P. Crescenzi, and P. Fraigniaud. Parsimonious flooding in dynamic graphs. *Distributed Computing*, 24(1) :31–44, 2011.

[Bol01] B. Bollobás. *Random Graphs*. Cambridge University Press, 2001.

[CCD+13] A. Clementi, P. Crescenzi, C. Doerr, P. Fraigniaud, M. Isopi, A. Panconesi, F. Pasquale, and Silvestri R. Rumor spreading in random evolving graphs. Technical report, arXiv, 2013.

[CMM+10] A. Clementi, C. Macci, A. Monti, F. Pasquale, and R. Silvestri. Flooding time of edge-markovian evolving graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 24(4) :1694–1712, 2010.

[CMPS09] A. Clementi, A. Monti, F. Pasquale, and R. Silvestri. Broadcasting in dynamic radio networks. *J. Comput. Syst. Sci.*, 75(4) :213–230, 2009.

[CMPS11] A. Clementi, A. Monti, F. Pasquale, and R. Silvestri. Information spreading in stationary markovian evolving graph. *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.*, 22(9) :1425–1432, 2011.

[DGH+87] A. Demers, D. Greene, C. Hauser, W. Irish, J. Larson, S. Shenker, H. Sturgis, D. Swinehart, and D. Terry. Epidemic algorithms for replicated database maintenance. In *Proc. of 6th ACM PODC*, pages 1–12, 1987.

[Fer02] A. Ferreira. On models and algorithms for dynamic communication networks : The case for evolving graphs. In *Proc. of 4th ALGOTEL*, pages 155–161, 2002.

[GH10] P. Grindrod and D.J. Higham. Evolving graphs : dynamical models, inverse problems and propagation. In *Proc. R. Soc. A, 466(2115)*, pages 753–770, 2010.

[JVG+07] M. Jelasity, S. Voulgaris, R. Guerraoui, A.-M. Kermarrec, and M. van Steen. Gossip-based Peer Sampling. *ACM Trans. Comp. Syst.*, 25(3) :Article 8, 2007.

[KLO10] F. Kuhn, N. Linch, and R. Oshman. Distributed Computation in Dynamic Networks. In *Proc. 42nd ACM STOC*, pages 513–522. ACM New York, 2010.

[VP11] M. Vojnovic and A. Proutier. Hop limited flooding over dynamic networks. In *Proc. of 30th IEEE INFOCOM*, pages 685–693. IEEE, 2011.

[WCDdA11] J. Whitbeck, V. Conan, and M. Dias de Amorim. Performance of Opportunistic Epidemic Routing on Edge-Markovian Dynamic Graphs. *IEEE Tr. on Comm.*, 59(5) :1259–1263, 2011.